$\underset{\overset{\shortparallel}{\text{id}}}{\varphi} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$, parce que $\displaystyle\int_\Omega \big| \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\varphi(x)} \big| \, d\mathbb{P}_X(x) =$ voir ci-dessous $= p < \infty$

EXERCICE 4

On considère X une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On note $\mathbb{P}_X$ cette loi. On rappelle que $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Calculer $\int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$.

On admet que

$$\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x) = p \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_1(x) + (1-p) \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x),$$

calculer $\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x)$. Comparer et commenter.

Théorème 2.4.20 (Théorème de transfert). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.*

i) Soit une v.a.r. X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. En posant $Y = \varphi(X)$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi(X)) = \int_\Omega (\varphi \circ X)(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(\varphi).$$

ii) Soit une v.a.r. X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En posant $Y = \varphi(X)$, Y est intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si et seulement si φ est intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) = \int_\Omega (\varphi \circ X)(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(\varphi).$$

iii) Soit une v.a.r. X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f et $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable positive. En posant $Y = \varphi(X)$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) d\lambda_1(x).$$

iv) Soit une v.a.r. X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f et $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. En posant $Y = \varphi(X)$, Y est intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si et seulement si $\varphi \times f$ est intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ et

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) d\lambda_1(x).$$

$$\int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \varphi(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi(x)}_{=x}\, d\mathbb{P}_X(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x \cdot d(p\delta_1 + (1-p)\delta_0)(x)$$

$$= p \cdot \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_1(x) + (1-p) \cdot \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x) =$$

$$= p \cdot \int_{\mathbb{R}} 1\, d\delta_1(x) + (1-p) \cdot \int_{\mathbb{R}} 0\, d\delta_0(x)$$

$$= p \cdot \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\, d\delta_1(x) + (1-p) \cdot \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\, d\delta_0(x) =$$

$$= p \cdot 1 \cdot \underbrace{\delta_1(\mathbb{R})}_{=1} + (1-p) \cdot 0 \cdot \underbrace{\delta_0(\mathbb{R})}_{=1}$$

$$= \underline{p}$$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x$

$\varphi \circ X = X$

$\Rightarrow \varphi = \text{id}$

$x = 1$

δ_1 presque partout, parce que

$\delta_1(\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}) =$

$= \delta_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = 0$

$x = 0$

δ_0 presque partout, parce que $\delta_0(\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}) = \delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$

$a \in \mathbb{R}$

$$\delta_a : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$$
$$A \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mesurable

$f = g$ μ presque partout $\Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$

$$\int a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\, d\mu =$$
$$= a_i \cdot \mu(A_i)$$

$$= a_i \cdot \mu(A_i)$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.*
2. *Montrer que si X est à valeurs finies*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$
3. *Montrer que $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X>n}$. En déduire que*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$
4. *En déduire $\mathbb{E}(X)$ si il existe $p \in]0,1[$ tel que X suit une loi telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1.) $\mathbb{E}[X]$ exist parce que

$$\int_\Omega \underbrace{X^-(\omega)}_{=\max\{0,-X(\omega)\}=0} \, d\mathbb{P}_{\underbrace{\in\mathbb{N}}} = \int_\Omega 0 \, d\mathbb{P}(\omega) = 0 < \infty$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mésurable

$\int f \, d\mu$ exist $:\Leftrightarrow \int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty$ ou $\int_\Omega f^- \, d\mu < \infty$

Dans ce cas

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

f intégrable

$\downarrow$

$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) :\Leftrightarrow \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ éspace de probabitée

$X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ variable aléatoire

$\mathbb{E}[X]$ exist $:\Leftrightarrow \int_\Omega X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$ exist

$X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) :\Leftrightarrow \int_\Omega |X(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) < \infty$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.*
2. *Montrer que si X est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X>n}$. En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

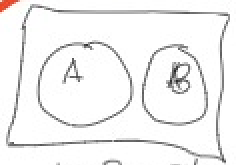
4. *En déduire $\mathbb{E}(X)$ si il existe $p \in]0,1[$ tel que X suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

2.) Soit X à valeurs finies, ça veut dire qu'on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(X \in \{1, .., N\}) = 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \cdot \overbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}^{p_i} \to \sum_{i=1}^{N} i \cdot \mathbb{P}(X = i)$$



$A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{N} \mathbb{P}(X = i)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=n+1}^{N} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{i-1} \mathbb{P}(X = i) =$$

$a + b = b + a$ Commutativité

$a + (b + c) = (a + b) + c$ Associativité

$n < i$

$$= \sum_{i=1}^{N} i \cdot \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{E}[X]$$

$$\sum_{i=3}^{10} 5 = 5 \cdot |\{3,4,5,6,7,8,9,10\}| = 5 \cdot 8 = 40$$

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b} c = c \cdot (b - a + 1)}$$

EXERCICE 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et on suppose que* X *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de* $\mathbb{E}(X)$.
2. *Montrer que si* X *est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que* $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X>n}$. *En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

4. *En déduire* $\mathbb{E}(X)$ *si il existe* $p \in]0, 1[$ *tel que* X *suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

3.) À montrer : $X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}$

Soit $i \in \mathbb{N}$, $w \in \Omega$

$$X(\omega) = i$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{1}_{X>n}(\omega) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_{<i} \ \wedge \ \mathbb{1}_{X>n}(\omega) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq i}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{i-1} \underbrace{\mathbb{1}_{X>n}(\omega)}_{=1} = i \ \wedge \ \sum_{n=i}^{\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{X>n}(\omega)}_{=0} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}(\omega) = i$$

$$\Rightarrow X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}\right] = \int_{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

$\int \sum_{n=0}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X>n}(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

Beppo-Levi

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Théorème (***Théorème de convergence monotone***)

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite **croissante** de fonctions mesurables **positives** sur E. On a :

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty}\uparrow f_n \, d\mu.$$

b) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. On a :

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f \, d\mu.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>n)$$

$$\boxed{\int \sum_i a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu = \sum_i a_i \, \mu(A_i)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Somme géometrique

Si $|q|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Série géometrique